

# 股价指数时间序列的分形性质分析\*

陈军飞

(河海大学国际工商学院, 南京 210098)

申富饶

(南京大学商学院, 南京, 210093)

王嘉松

(南京大学数学系, 南京, 210093)

**摘要** 用一种新的信号处理工具—小波变换, 对股价指数数据进行分析, 发现股价指数数据类似于一类更广泛的噪声—分形噪声, 从而推广了传统上处理股价指数时间序列时总假定其为白噪声或高斯噪声的假设, 用分形噪声能更好地刻划股价指数数据的波动特性. 对上证指数和深证指数的实证分析显示, 两市股价指数均存在正相关, 我国股票市场不是弱式有效市场. 实证也显示出小波变换是研究股价指数波动特性的一种有效的方法.

**关键词** 小波变换, 股价指数, 分形噪声

经济活动中, 股票已成为投资热点. 但是受各种因素的影响, 股票价格经常波动, 使其风险性和高收益性并存. 近年来, 人们引进新的数学工具如分形几何、小波分析等对股票价格数据或股票数据进行了大量的研究, 逐步发现了一些规律. 如股价指数曲线具有分形自相似性<sup>[9]</sup>, 从而可求其分数维. 把小波变换引入股票价格的分析中, 可分析股票数据的奇异点(即剧烈震荡的点)<sup>[5]</sup>. 认为股票价格的变动服从布朗运动, 并引入了谱分析方法<sup>[6][7]</sup>等等. 而分形噪声作为一种随机分形包括分数布朗运动和分数高斯噪声等, 它们是布朗运动和白噪声的推广. 由此想到股票数据会不会是分形噪声呢? 通过对上证指数和深证指数的实证分析, 本文得出了股价指数近似为分形噪声的结论, 为进一步研究股价指数的性质提供了有效的方法和较好的结论.

## 1. 分形噪声、小波变换算法

### 1.1 分形、分形噪声

定义 1<sup>[1]</sup> 设满足: 对任意  $t \geq 0, h \geq 0$ , 增量  $x(t+h) - x(t)$  服从正态分布, 且其方差  $\text{var}(x(t+h) - x(t)) \propto h^{2H}$ , 则称  $x(t)$  为指数为  $H$  的分数布朗运动, 增量  $x(t+h) - x(t)$  称为指数为  $H$  的分数高斯噪声.

分数布朗运动和分数高斯噪声可以通过付氏变换得到较好的统一, 在频率域内, 它们的功率谱近似满足<sup>[3][10]</sup>:

$$p(f) \propto |f|^{-\beta} \quad (1)$$

其中  $-1 < \beta < 3$ . 当  $1 < \beta < 3$  时, 为分数布朗运动,  $\beta$  与  $H$  的关系为:  $\beta = 2H + 1$ , 此时随机过程

\* 收稿日期, 1999-05-31

$x(t)$  表现出正相关. 当  $-1 < \beta < 1$  时, 为分数高斯噪声,  $\beta$  与  $H$  的关系为:  $\beta = 2H - 1$ , 此时随机过程  $x(t)$  表现出负相关.  $\beta = 1$  时, 称为脉动噪声,  $\beta = -1$  时, 称为微分脉噪.

因此在频率域内如果把分数布朗运动和分数高斯噪声都看成噪声的话, 则可以拓广噪声的范围, 把满足(1)式幂率性质的随机分形统称为分形噪声. 分形噪声具有自相似性, 所谓自相似性是指客观对象的部分与整体具有相似的性质, 即将某一客观对象的部分放大后与整体是相似的.

### 1.2 小波变换及其算法

定义 2<sup>[3]</sup> 设函数  $\Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , 即  $\int_{\mathbb{R}} |\Psi(x)| dx < +\infty, \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x)|^2 dx < +\infty$ , 且有  $\int_{\mathbb{R}} \Psi(x) dx = 0$ , 其中  $\hat{\Psi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(x) e^{-i\omega x} dx$  为  $\Psi(x)$  的付氏变换, 则按如下方式生成的函数族  $\{\Psi_{a,b}\}$ ,

$$\Psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \Psi[(x-b)/a], \quad b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

称为连续小波,  $\Psi$  称为基本小波.

定义 3 若  $\Psi$  为基本小波且满足容许性条件:  $C_{\Psi} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$ , 则  $f \in L^2(\mathbb{R})$  的连续小波变换定义为

$$(W_{\Psi}f)(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle = |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx.$$

其中  $\overline{\Psi(x)}$  表示取  $\Psi(x)$  的共轭复数.

若记  $H, G$  为  $l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$  的如下算子, 对任意  $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$

$$(HC)_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j h_{j-2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j a_{j-2n}$$

$$(GC)_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j g_{j-2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j b_{j-2n}$$

$H, G$  称为镜像滤波算子.

根据正交小波变换理论, 一离散信号矢量  $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T, (N = 2^m)$  通过镜像滤波算子  $H$  和  $G$  的递归运算进行  $J$  层小波分解得到的小波系数  $d^i (i = m-1, \dots, m-J)$  及对应于最低频的尺度系数  $c^{m-J}$  为:

$$d = \begin{pmatrix} d^{m-1} \\ d^{m-2} \\ \dots \\ d^{m-J} \\ c^{m-J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf \\ GHf \\ \dots \\ GH^{J-1}f \\ H^Jf \end{pmatrix}$$

算子  $G, H$  如前定义.

设算子  $GH^{i-1} (i = 1, 2, \dots, J)$  所对应的变换矩阵为  $W_i$ , 则  $W_i \in R_2^{N_i \times N}$  算子  $H^J$  所对应的变换矩阵为  $S_J$ , 如果记

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_J \\ S_J \end{pmatrix}$$

则有  $d = Wf$ .

根据算子  $H$  的定义, 它所对应的变换矩阵为

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{L-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-3} & h_{L-2} & h_{L-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 \end{pmatrix}$$

而算子  $G$  所对应的变换矩阵  $A_\Psi$  与  $A_\varphi$  有类似的形式. 但应用该变换矩阵对信号进行小波变换会造成严重的边缘影响, 因而实际应用时都对变换矩阵以下述形式周期化,

$$A_\varphi^{(p)} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{L-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-3} & h_{L-2} & h_{L-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{L-2} & h_{L-1} \\ h_{L-2} & h_{L-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{L-4} & h_{L-3} \\ h_{1-4} & h_{L-3} & h_{L-2} & h_{L-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{L-6} & h_{L-5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & h_0 & h_1 \end{pmatrix}$$

把  $A_\varphi^{(p)}$  中的  $h_k$  相应地变换成  $g_k (k = 0, 1, 2, \dots, L - 1)$ , 即得到算子  $G$  的周期化的变换阵  $A_\Psi^{(p)}$ . 以下为记号方便, 以  $A_\varphi(N_1, N_2)$  和  $A_\Psi(N_1, N_2)$  分别表示  $A_\varphi^{(p)}$  和  $A_\Psi^{(p)}$  且阶数为  $N_1 \times N_2$  的变换矩阵.

下面我们给出计算  $W$  的数值方法, 由上面分析可知:

$$W_1 = A_\Psi(N/2, N)$$

$$W_i = A_\Psi(N/2^i, N/2^{i-1}) \prod_{k=1}^{i-1} A_\varphi(N/2^k, N/2^{k-1}), \quad i=2, 3, \dots, J \quad (2.1.1)$$

$$S_J = \prod_{k=1}^J A_\varphi(N/2^k, N/2^{k-1}).$$

定理 1 正交小波变换矩阵  $W$  是一个正交矩阵.

### 1.3 分形噪声的小波分解

对分形噪声进行小波变换, 其小波系数在尺度  $j$  时的方差有如下特性<sup>[4]</sup>:

$$\sigma_j^2 = \text{var}(d_n^j) = \sigma^2 V_\Psi(\beta) 2^{\beta j}$$

这里  $\text{var}(d_n^j)$  是小波系数在尺度  $j$  时的方差,  $\sigma^2$  是噪声方差,  $V_\Psi(\beta)$  是依赖于  $\beta$  和小波  $\Psi$  的常量. 参数  $\beta$  可通过一简单的线性回归估计:

$$\log_2(\text{var}(d_n^j)) = \beta j + \text{constant} \quad (2)$$

小波系数在尺度  $j$  时的方差有如下的无偏估计:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{2^j - 1} (d^j)^T d^j. \tag{3}$$

由于分形噪声的功率谱近似满足(1), 因此如果能验证股票数据的功率谱近似满足(1), 即得到了股价指数为分形噪声结论. 而分形噪声经小波变换后其小波系数的方差满足(2), 因此最终可以把验证股价指数是否为分形噪声转化为验证(2)是否成立, 也即参数  $\beta$  是否近似满足线性回归方程  $\text{Log}_2(\text{var}(d^j)) = \beta j + \text{constant}$ .

## 2. 实证分析

1990 年 12 月和 1991 年 4 月, 上海证券交易所、深圳证券交易所相继成立, 标志着我国已建立起包括发行市场和交易市场在内的股票市场. 十年来, 我国股票市场已经取得了长足的发展, 股市逐步趋向理性化、规范化. 股指在很大程度上受宏观经济影响, 但是由于经济环境的复杂性, 以及我国经济体制在许多方面不断发生变化, 许多难以度量的结构性因素和其他难以预料的因素都对股市产生影响, 直接表现即股指似乎无规律的波动. 应用上面介绍的小波分析理论, 我们对上证股指、深证股指数据进行分析, 以期发现股指波动的内在规律.

### 2.1 上证指数分析

取上证指数 1994 年 1 月 3 日至 1997 年 12 月 10 日的原始数据如图 1, 从图 1 可以看出, 在时间域上, 上证指数上下波动, 这正体现了上海股指行情变动的一个基本特征——随机性. 用笔者用 C 语言编的正交小波变换程序, 在 TC 集成环境下, 采用 Daubechies D6 小波基对原始数据直接进行 6 层正交小波变换可以得到一系列的小波系数  $d^j(j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ , 应用(3)式可以估计在尺度  $j(j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$  时小波系数的方差  $\text{var}(d^j)$ , 得到散点序列  $(j, \text{var}(d^j))$ ,  $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$ . 图 2 是小波系数尺度  $j$  和  $\text{Log}_2(\text{var}(d^j))$  的图形, 其中横轴对应尺度  $j$ , 纵轴对应  $\text{log}_2(\text{var}(d^j))$ . 系列 1 的折线是联结各散点得到的, 相应的点的坐标为  $(1, 2.7), (2, 5.7), (3, 8.1), (4, 9.7), (5, 13.6), (6, 15.5)$ . 系列 2 是拟合散点得到的直线, 相应的点的坐标为  $(1, 3.1), (2, 5.6), (3, 8.1), (4, 10.6), (5, 13.1), (6, 15.6)$ . 从图中可以看出散点近似在一条直线上, 直线的斜率为 2.5, 也即  $\beta \approx 2.5$ . 因此根据前面的分析, 上证指数近似为分形噪声.

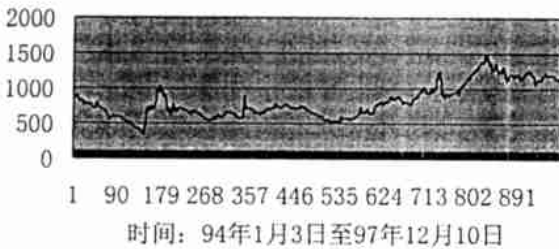


图 1 上证指数原始数据图

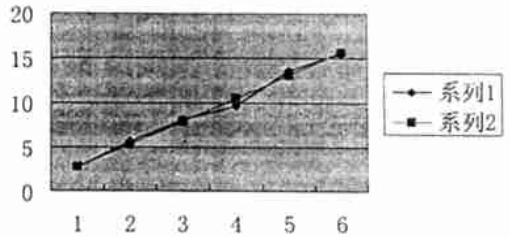


图 2  $\beta$  的散点拟合图

说明: 在进行正交小波变换时, 本文采用 Daubechies D6 小波来实现算法, 与 Daubechies D6 小波对应的镜像滤波算子  $H, G$  相对应的滤波系数为

$$\begin{aligned}
 h_0 = -g_5 &= (1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) / 16\sqrt{2}, & h_1 = g_4 &= (5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) / 16\sqrt{2}, \\
 h_2 = -g_3 &= (10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) / 16\sqrt{2}, & h_3 = g_2 &= (10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) / 16\sqrt{2}, \\
 h_4 = -g_1 &= (5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) / 16\sqrt{2}, & h_5 = g_0 &= (1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) / 16\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

正交小波变换时也可取其他的正交小波基函数, 如 Mexican Hat 小波、Morlet 小波、Meyer 小波及其他样条小波, 所得结论类似。

## 2.2 深证指数分析

对深证指数数据进行分析, 取的时间序列从 1994 年 1 月 3 日至 1997 年 12 月 10 日, 其原始数据图如图 3。同样用 Daubechies D6 小波对其进行正交小波变换, 作出尺度  $j$  和  $\text{Log}_2(\text{var}(d^j))$  的散点图, 如图 4。系列 1 的折线是联结点各散点得到的, 系列 2 是拟合散点得到的直线。从图中可以看出散点近似在一条直线上, 直线的斜率为 2.42, 也即  $\beta \approx 2.42$ 。因此深证股指近似为分形噪声。

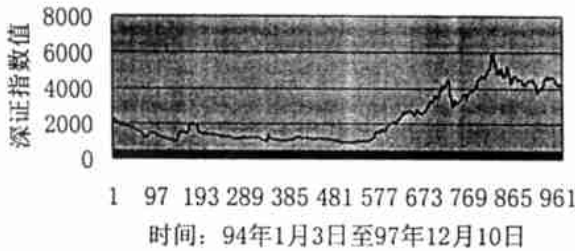


图 3 深证指数原始数据图

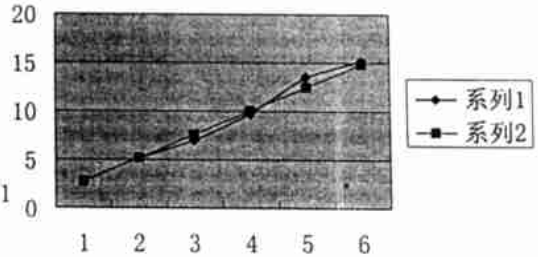


图 4  $\beta$  的散点拟合图

## 3. 结论

通过对上证指数和深证指数 1994 年 1 月 3 日至 1997 年 12 月 10 日这一时期数据的实证分析, 可以得出如下几点结论:

(1) 两市股指近似为分形噪声, 分形噪声能更好地刻划股价指数数据的波动规律。

(2) 我国股价指数波动并不是完全随机的, 而是有一定的规律性, 表现在股指变动有一定的相关性。实证分析显示上证指数  $\beta \approx 2.5$ , 深证指数  $\beta \approx 2.42$ , 表明两地股指曲线在波动程度上大体相同, 且都显示近期的正相关, 即股指一段时间持续增长, 而另一段时间持续下跌。如某只股票某一天价格大幅下跌, 在随后的几天里可能会由于持有该股的投资者大量抛售该股票而使股价进一步下跌, 这与股市股票波动情况相吻合。

(3) 股票市场的效率分析依据的是简森和法码教授提出的有效市场假设理论, 其本质是考察股票市场的价格波动是否充分反映了所有可得的信息。法码教授按照可得信息的数量和范围把市场效能划分为: 弱式效能、中式效能和强式效能。我国股指的正相关性显示我国股票市场不是弱式有效市场。弱式有效市场指目前的股价指数与其过去的股价指数之间是相互独立的, 也即股市应满足对任何一天的股指变化应与过去时间股指发生的变化无关, 而我国股指显示正的相关性。

(4) 与传统的时间序列分析法、谱分析法相比,小波变换应用于股价指数数据的分析是对股价指数数据处理方法的一种新的尝试,它无需对原始数据进行人工处理,且分析过程简单.考虑到分形噪声的自相似性可以用小波变换研究股指的周期性.

有了股价指数近似为分形噪声这一结论,对检测股价指数数据的奇异点,以及对股价指数数据进行分形插值预测等问题都可进一步研究.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Mandelbrot, B. B. & Van Ness, H. W., Fractional brownian motions, *Fractional Noises and Applications*. SIAM Rev., **10**(1968), 422—436.
- [ 2 ] [美] 崔锦泰著,程正兴译,小波分析导论,西安交通大学出版社,1995.
- [ 3 ] Flandrin. p., Wavelet Analysis and Synthesis of Fractional Brownian Motion, *IEEE Trans on Information Theory*, **38**(1992), 910—917.
- [ 4 ] Wornell, G. W. & Oppenheim, A. V., estimation of fractal signal from noisy measurements using wavelet. *IEEE Trans Signal Proc*, **40**(1992), 611—623.
- [ 5 ] Ramsey, J. B. et al., An analysis of U. S. stock price behavior using wavelets, *Fractals*, **3**: 2(1995), 377—389.
- [ 6 ] Granger C. W. J., Spectral analysis of economic time series, *Princeton University Press*, Princeton, NJ, 1964.
- [ 7 ] Granger, C. & Morgnster O., Spectral analysis of new york stock market price, *Kykbs*, **16**(1963), 1—27.
- [ 8 ] 陈军飞,用小波变换解超定线性方程组,南京大学学报数学半年刊, **15**: (1998) 2257—265.
- [ 9 ] Evertsz, J.G., Fractal geometry of financial time series. *Fractal*, **3**: 3(1995) 609—616.
- [ 10 ] Plotnick R. E. & Presteggaard, K., Fractal analysis of geologic time series, in *fractal in Geograph*, Lam, N. S. & Cola, L.D. eds., PTR Prentice-Hall Inc., 1993.

## THE FRACTAL PROPERTY ANALYSIS OF STOCK PRICE INDEX TIME SERIES

Chen Junfei

( College of International Business, Hohai Univ. Nanjing, 210098)

Shen Furao

( College of Intemational Business, Nanjing Univ. , 210093)

Wang Jiasong

( Dept. of math, Nanjing Univ. , 210093)

**Abstract** Wavelet transform is a new signal process method. We have used it to analyze stock price index and found that it is well characterized by fractal noise that is more general than white noise or gauss noise. Therefore, fractal noise can describe the property of stock price index more precisely. The results show that the stock price index of Shanghai and Shenzhen exist positive correlation and the stock market is not low efficient. It also shows that wavelet transform is an effective method for study stock character.

**Keyword** wavelet transform, stock price index, fractal noise